# 第三章 圓與球

## 3-1 圓的方程式

### 一、圓的方程式：

定義：平面上, 和一個定點 M 等距離的所有點所成的圖形稱爲一個圓.

這個定點 M 叫做**圓心**, 圓心和圓上一點的距離叫做**半徑**.

**1.標準式：**

以 $M(h, k)$爲圓心, $r$ 爲半徑的圓方程式爲 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

【證明】: 若 $P(x, y)$ 是圓 $C$ 上任意一點, 則因爲 $\overline{PM}=r$, 依距離公式可得

$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$ 整理得 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

**2.一般式：**

將圓的標準式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 展開, 可得形如 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

的方程式, 我們稱之爲圓的**一般式**。

注意： $x^2$ 與 $y^2$ 的係數相同，並無 $xy$ 項。

【討論】: 將方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$, 配方得

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(d^2+e^2-4f).$$

令 $D=d^2+e^2-4f$, 可判斷圖形：

(1)當 $D>0$ 時, 代表一圓, 圓心爲 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$, 半徑爲 $\frac{\sqrt{D}}{2}$.

(2)當 $D=0$ 時, 代表一點 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$.

(3)當 $D<0$ 時, 沒有圖形.

**3.參數式：**

利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，將圓 $C$: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的 $x, y$ 寫成參數式：

$$\begin{cases} x-h=r\cos\theta, \\ y-k=r\sin\theta, \end{cases} \quad (0\le\theta<2\pi).$$

利用參數式可解決一些關於圓的極值問題。

**4.直徑式：**

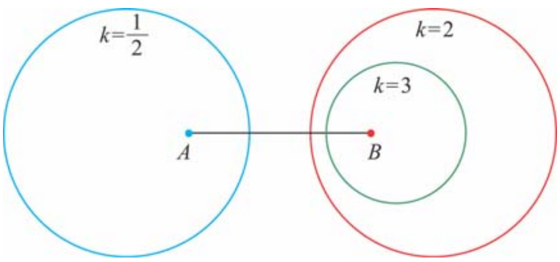
平面上相異兩點 P( $a, b$ ) ，Q( $c, d$ )，則以 $\overline{PQ}$ 爲直徑的圓方程式可寫爲

$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$，稱爲直徑式。

【證明】:

5. <u>阿波羅尼奧斯圓</u>：

和兩相異定點$A$與$B$的距離比恆爲正數$k$的$P$點（即$\overline{PA}=k\overline{PB}$），當$k\neq 1$時，它們所成的圖形都會是一個圓. 我們稱這種圓爲<u>阿波羅尼奧斯圓</u>(Apollonius circles). 下圖就是$k$ = 2, 3 及$\frac{1}{2}$的情形. 【註】：當k=1 時，P構成的圖形爲$\overline{\text{AB}}$的中垂線。




$\overline{PA}=k\overline{PB}$

## 二、圓內、圓外

已知圓方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ，則

(1) 點 (x,y) 在圓內$\Leftrightarrow$點(x,y)滿足不等式 $(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$

(2) 點 (x,y) 在圓外$\Leftrightarrow$點(x,y)滿足不等式 $(x-h)^2+(y-k)^2>r^2$

(3) $y-k=\sqrt{r^2-(x-h)^2}$ 爲上半圓，$y-k=-\sqrt{r^2-(x-h)^2}$ 爲下半圓

(4) $x-h=\sqrt{r^2-(y-k)^2}$ 爲右半圓，$x-h=-\sqrt{r^2-(y-k)^2}$ 爲左半圓

【例 1】求符合下列條件的圓方程式：

(1) 以點 $(0, 0)$ 爲圓心， 半徑爲 4 的圓,

(2) 以點 $(2, -3)$ 爲圓心， 半徑爲 2 的圓.

【例 2】將下列方程式化成 $(x-h)^2+(y-k)^2=l$ 的形式, 並說明它所表示的圖形.

(1) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

(2) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$.

(3) $x^2+y^2-4x+6y+17=0$.

【例 3】求下列以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓方程式.

(1) $A(4, 9)$, $B(6, 3)$,

(2) $A(2, 3)$, $B(5, -1)$,

【例 4】求下列各圓的圓心和半徑：

(1) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$,

(2) $x^2+y^2-2x+6y-6=0$,

(3) $9x^2+9y^2-6x-35=0$.

【例 5】已知 $x^2+y^2+2x+2y+k=0$ 的圖形爲一圓, 求 $k$ 的範圍.

【例 6】分別求通過 A，B，C 三點的圓的方程式：

(1) A(1,1), B(1,−1), C(−2,1)

(2) A(0, 0), B(1, 1), C(4, 2)

【例 7】下列何者的圖形為一圓？若為圓，求圓心及半徑.

(1) $(x-1)^2+(y+1)^2=-4$.

(2) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$.

(3) $(x-9)(x+3)+(y+1)(y-4)=0$.

(4) $\begin{cases} x=1+3\cos\theta, \\ y=2+3\sin\theta, \end{cases}$ （$0\le\theta<2\pi$）.

【例 8】將下列各圓以參數式表示：

(1) $x^2+y^2=4$.

(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

【例 9】求以點 $M(2,\ -3)$為圓心, 通過點 $A(5,\ 1)$的圓方程式.

並判斷 $P(6, 0)$, $Q(-2, -1)$, $R(0, 2)$是在圓內、圓外還是圓上.

【例 10】設圓 $C$ 的方程式為 $x^2 + y^2 = k$ ,

(1)若圓 $C$ 通過 $A(\sqrt{3}, -1)$, 求 $k$ 值.

(2)若 $P(1, -2)$在圓 $C$ 內部, $Q(-3, 3)$在圓 $C$ 外部, 求 $k$ 的範圍.

【例 11】設圓$C : x^2 + (y-2)^2 = 9$.

(1)點$A(3, -2)$在圓$C$的內部、外部、還是圓上？

(2)若$P$為圓$C$上一點, 求$\overline{AP}$的最小值

【例 12】求符合下列條件的圓方程式：

(1) 與 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ 同圓心, 且通過點(3, 5)的圓.

(2) 通過兩點(1, 4), (0, 3)且圓心在 $x$ 軸上的圓.

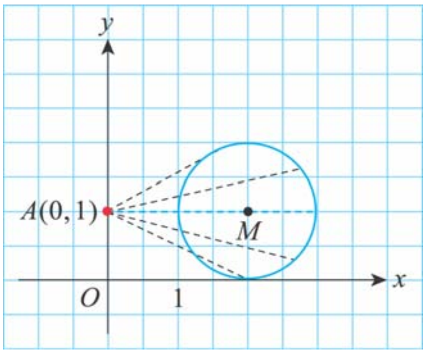
(3) 與圓 $C$： $(x-3)^2 + y^2 = 16$ 有相同的圓心, 且圓周長為圓 $C$ 一半的圓.

(4) 設圓 $C$： $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$, 求與圓 $C$ 有相同的圓心且面積為圓 $C$ 面積 2 倍的圓.

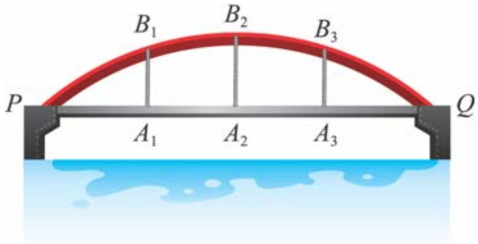
【例 13】兩圓 $C_1 : (x+1)^2 + y^2 = 4$ 和 $C_2 : (x-5)^2 + y^2 = a$相交, 求實數$a$的範圍.

【例 14】已知 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, 若 $P(x, y)$爲平面上動點，且 $\overline{PA}=\sqrt{2}\,\overline{PB}$，求所有 $P$ 點所成軌跡的方程式.

【例 15】設$(a, b)$爲圓$C: x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 上的點，求$a^2+(b-1)^2$的最大值.




【例 16】橋面上有一圓拱形建築，圓拱的寬度$\overline{PQ}=30$公尺，拱高$\overline{A_2B_2}=5$公尺（如圖），在距中心左右 7 公尺處各有一纜繩連接橋面，求圖中纜繩$\overline{A_3B_3}$的長.

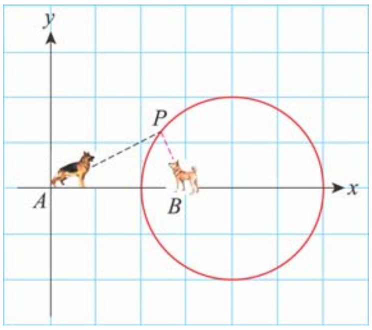



【例 17】獵人養了大小兩隻獵犬，每次狩獵時，都讓兩獵犬守候在相距 30 公尺的兩位置上. 當獵人射下獵物時，兩獵犬會同時

向著獵物直衝過去. 若大獵犬的速度是小獵犬的 2 倍,

(1)兩獵犬會同時抵達獵物的所有可能點 $P$ 會構成什麼圖形？

(2)求小獵犬會先追到獵物的範圍區域面積.




【備忘錄】

## 3-1 精選題

1. 求圓 $x^2+y^2=9$ 內接正方形的面積為____________ .

2. 已知圓心在點$(-3,2)$，求合於下列條件之圓方程式：

(1) 半徑爲 6 之圓方程式爲＿＿＿＿＿＿；

(2) 圓通過點 P(1, 5) 之圓方程式爲＿＿＿＿＿＿．

3. 求$2x^2+2y^2-4x-12y+2=0$的(1)圓心爲＿＿＿＿＿＿；(2)半徑爲＿＿＿＿＿＿．

4. 求下列各圓$C$之 圓心坐標、半徑$r$與圓方程式：

(1) 通過$A(-2,1)$，$B(3,4)$且圓心在$x$軸上：

(2) 過點$A(-2,3)$，$B(0,-1)$且圓心在$x=y$上

(3) 過點$A(3,2)$，$B(-1,4)$ 且弦心距爲$\sqrt{5}$

(4) 點$A(2,5)$，$B(3,-1)$爲圓直徑上的二端點

(5) 過$A(1,3)$，半徑爲 4，圓心在$x-y-2=0$上

(6) 通過$A(1,1)$且與已知圓$x^2+y^2-4x-2y=0$有相同圓心，

5. 設方程式$x^2+bxy+cy^2+2dx-2y+5=0$表一圓，則 b =＿＿＿＿，c =＿＿＿＿，$d$的範圍爲＿＿＿＿＿＿．

6. 平面上二定點$A(1,2)$，$B(-2,-4)$，若動點$P(x,y)$滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$，

求所有$P$點所成圖形之方程式爲＿＿＿＿＿＿．

7. 設圓$C$的圓心在$(-2,-3)$，另一圓$C':(x-1)^2+(y-1)^2=1$，

(1) 若 C 與 C'內切，求圓$C$的方程式爲＿＿＿＿＿＿．

(2) 若 C 與 C'外切，求圓 $C$ 的方程式爲____________ .

8. 過 $(1,-1)$，$(0,2)$ 與 $(2,-2)$ 三點的圓方程式，其圓心爲____________ .

9. 若 $(6,2)$，$(4,6)$，$(-3,5)$，$(k,-3)$ 四點在同一圓上，則 $k=$____________ .

10. 設一圓與直線 $L_1:3x-4y+7=0$，$L_2:3x-4y-3=0$ 均相切，且圓心在直線 $L:x-2y+2=0$ 上，則此圓方程式爲____________ .

11. $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 之圖形爲一點時，則 $k=$____________ .

12. 設 $k$ 爲實數，方程式 $x^2+y^2+4x-2ky+(k+6)=0$ 的圖形爲一圓，則 $k$ 的範圍爲____________ .

13. 就 $m$ 值討論方程式 $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+3m^2-2=0$ 的圖形 ：

(1)若圖形不存在，則 $m$ 的範圍爲____________；

(2)若圖形爲一點，則 $m$ 的值爲____________；此點坐標爲____________ .

(3)若圖形爲一圓，則 $m$ 的範圍爲____________；此時圓的最大面積爲____________ .

14. 過 $P(2,3)$ 作圓 $C:x^2+y^2-8x+6y=0$ 的二切線，切點爲 $A$、$B$，則

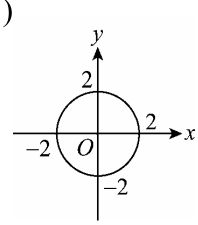
(1) 圓心爲____________，

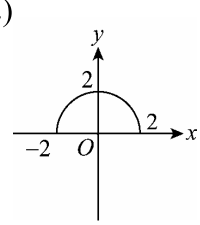
(2) 半徑為 ____________，

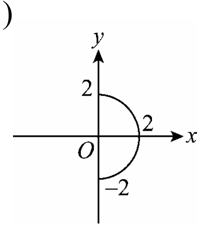
(3) $\triangle PAB$ 的外接圓方程式為____________；

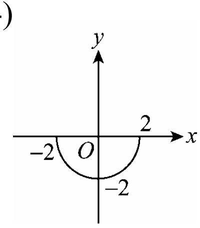
(4) $\overline{AB}=$____________ .

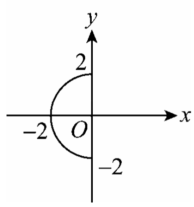
15. 坐標平面上，參數方程式 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$， $0\le\theta\le\pi$ ，所對應的曲線為下列何者？

(1)


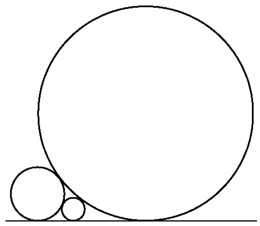

(2)



(3)



(4)



(5) .



16. 如右圖，三個兩兩外切的圓，也都與直線相切，最大圓半徑為 144，中圓的半徑為 36，求最小圓的半徑為何？
(1)4 (2)12 (3)16 (4)18 .



17. 點 $P(x,y)$ 在圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 上，則 $(x+1)^2+(y-3)^2$ 之最大值為____________ .

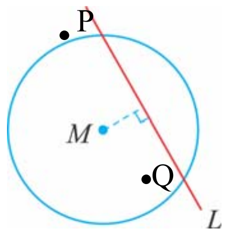
18. 設 $P(a,b)$ 是圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 上的點，則 $4a-3b$ 的最小值為____________ .

# 3-2 圓與直線的關係

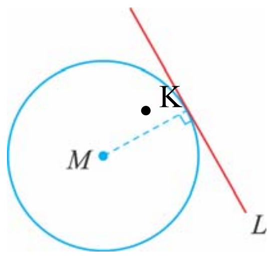
# 一、 圓與直線的關係：

設圓 $C$ 的圓心為 $M$, 半徑為 $r$, 圓心到直線 L 的距離為 $d$ ,

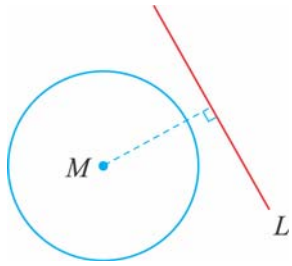
則圓與直線的關係如下：




$d<r$




$d=r$




$d>r$

(1) $d<r$, 此時直線 $L$ 與圓 $C$ 交於相異 P、Q 兩點，$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{r^2-d^2}$ .

(2) $d=r$, 此時直線 $L$ 與圓 $C$ 相切，切點 K 為圓心 $M$ 到直線 L 的投影點.

(3) $d>r$, 此時直線 $L$ 與圓 $C$ 不相交.

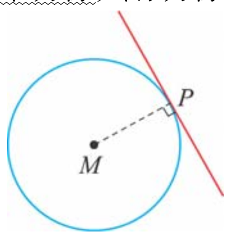
# 二、切線方程式：

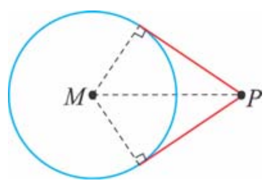
**1.** 圓的切線性質：

(1) 通過圓上一點的切線只有一條, 其切點和圓心的連線必垂直切線.

(2) 通過圓外一點 $P$ 可向圓作兩條切線, 兩切線段（切點和 $P$ 的連線）等長，

長度為$\sqrt{\overline{\mathrm{PM}}^2-r^2}$ .




**2.**切線段與切點弦：

過圓$C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$外一點$P(x_0,y_0)$作兩切線，切點為 $M$ 與 $N$，則 (1)

切線段長 $\overline{PM}=\overline{PN}=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f}$

(2) 切點弦方程式 $\overleftrightarrow{PQ}$ ：$x_0x+y_0y+d(\dfrac{x_0+x}{2})+e(\dfrac{y_0+y}{2})+f=0$

**3.** 切線方程式的求法：

**(1) 已知斜率**：設切線為 $y=mx+k$，利用圓心到切線的距離為 r 求出 $k$ 之值。

**(2) 已知切點**：圓上一點 $P(x_0,y_0)$，過 P 可作一條切線。

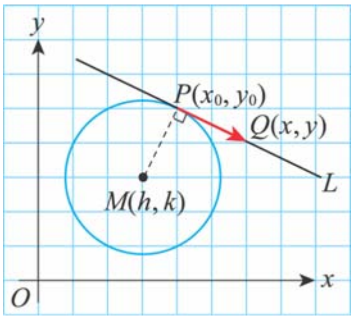
＜1＞ 若圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，此切線為

$$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2.$$

＜2＞ 若圓 $C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$，此切線為

$$x_0x+y_0y+d(\frac{x_0+x}{2})+e(\frac{y_0+y}{2})+f=0.$$

【證明<1> 】:




設 $Q(x, y)$為 $L$ 上的任意一點,

因為$P(x_0, y_0)$是切點, $\overline{MP}$ 垂直$L$,

所以$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$. 故得

$$(x_0-h, y_0-k)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0,$$

即 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$, ①

又因為$P(x_0, y_0)$在圓$C$上, 所以

$$(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2, \quad ②$$

將①②兩式相加, 整理得 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$，這就是切線 $L$ 的方程式.

**(3) 過圓外一點：**

設$P(x_0, y_0)$ 為圓外一點，設過P作圓的切線為$L:y-y_0=m(x-x_0)$，利用圓心到切線的距離等於半徑r，求出$m$之值。注意：$m$之值應有兩個，若只有一個，則另一個為鉛直切線。

【例 1】已知圓$C:x^2+y^2=5$，下列選項何者正確？

(1) 點(1, 1)在圓的內部.

(2) 通過(1, 1)的直線一定與圓 $C$ 交於兩點.

(3) 通過(7, 7)與(−7, −7)兩點的直線與圓 $C$ 不相交.

(4) 直線 $y=3$ 與圓 $C$ 不相交.

【例 2】設圓 $C: x^2+y^2=5$，試判斷圓 $C$ 和下列直線的相交情形.

(1) $L_1: x-y+1=0$.

(2) $L_2: x-2y-5=0$.

(3) $L_3: 3x+4y-15=0$.

【例 3】已知圓 $C$ 和直線 $L$ 的方程式如下：

試問圓 $C$ 和直線 $L$ 是否相交？若相交，求出它們的交點.

(1) $C$ ∶ $(x+1)^2+y^2=8$，$L: x+y=3$

(2) $C: x^2+y^2-12x+16y-125=0$，$L: y=15$ .

【例 4】 直線$L$: $3x+y=7$ 與圓$C$ : $(x+1)^2+y^2=20$ 是否相交？若相交，求$L$ 被$C$ 所截得的弦長.

【例 5】 設圓$C: x^2+(y-2)^2=9$，自$A(1,-1)$作圓$C$的切線交圓$C$於點$T$，求切線段$\overline{AT}$的

長.

【例 6】(1) 求通過$P(1, -2)$且與圓$x^2+y^2=5$ 相切的直線方程式.

(2) 求圓$(x-2)^2+(y+1)^2=10$ 在點$(3, -4)$處的切線方程式.

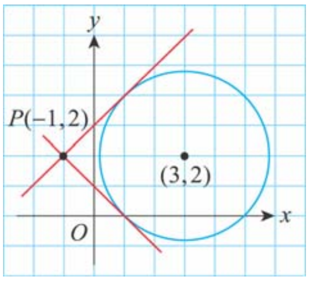
(3) 求通過$P(1, 4)$且與圓$x^2+y^2-2x+2y-23=0$ 相切的直線方程式.

【例 7】求平行直線$x+y=1$且與圓$x^2+y^2=2$ 相切的直線方程式.

【例 8】試就實數 $k$ 的範圍, 討論直線 $L: y=x+k$ 和圓$C: x^2+y^2=2$ 的相交情形.

【例 9】(1) 求通過點$(5, 1)$且與圓$x^2+y^2=1$ 相切的直線方程式.

(2) 設圓$C:(x-3)^2+(y-2)^2=8$, 求通過圓外一點$P(-1, 2)$且與圓$C$相切的直線方程式，

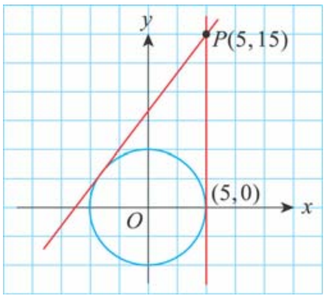



【例 10】

(1) 求過點$P(5, 15)$且與圓$C: x^2+y^2=25$ 相切的直線方程式

(2) 求過 $P(4,3)$ 且與圓 $(x-2)^2+y^2=4$ 相切的直線方程式.

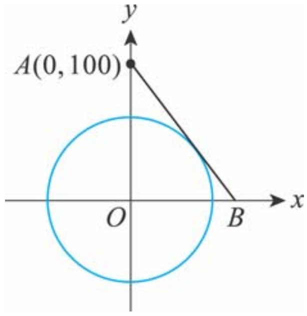
(3) 求通過點$(-1, -1)$且與圓 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 相切的直線方程式.




【例 11】

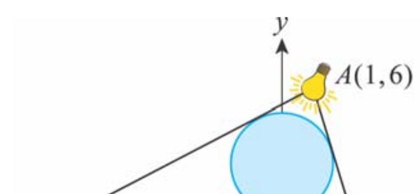
(1) 有一圓形碉堡, 甲站在碉堡的正北方與碉堡中心距離 40 公尺的 $A$ 處, 乙從碉堡中心向西走, 要走 30 公尺才剛好看到甲, 碉堡的半徑爲多少公尺？

(2) 有一半徑 60 公尺的圓形碉堡, 甲站在碉堡的正北方與碉堡中心距離 100 公尺的 $A$ 處, 乙從碉堡中心向東走, 要走多少公尺才會看到甲？




【例 12】在坐標平面上$A(1, 6)$處有一光源, 將圓$x^2+(y-3)^2=$ 5





投射到$x$軸上，如下圖所示，求其在$x$軸上的影子$\overline{PQ}$長.

【例 13】試就實數 $m$ 的範圍，討論直線 $L: y = mx + 2$ 和圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的相交情形.

【例 14】若過定點 $A(-1, 0)$ 且斜率爲 $m$ 的直線與圓 $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ 有交點，求 $m$ 的範圍.

【備忘錄】

**3-2 精選題**

1. 設圓$C$： $(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直線$L$： $3x+4y+14=0$，則直線$L$與圓$C$交點的個數爲

(1)0 (2)1 (3)2 (4)以上皆非．

2. 圓心爲$(1,-1)$的圓與直線$3x+4y-9=0$相切，則此圓的方程式爲____________．

3. 已知直線$L$： $4x-3y+7=0$及圓$C$： $(x-3)^2+(y+2)^2=4$上一點$P$，則

(1)試求$P$點到直線$L$距離的最大值爲____________ 及最小值爲____________；

(2)當$P$到直線$L$距離最小時，$P$點坐標爲何?

4. 圓$x^2+y^2=10$上一點$A(1,3)$的切線斜率等於 (1)$-3$ (2)$-\frac{1}{3}$ (3)1 (4)3．

5. 過$A(2,3)$且與圓$C$： $x^2+y^2=13$的切線方程式爲____________．

6. 以圓$C$： $x^2+y^2-6x+2y-15=0$上一點$A(-1,2)$爲切點作圓$C$之切線$L$，則$L$的方程式爲

____________．

7. 設斜率 2，且與圓$C$： $x^2+y^2=1$相切的直線方程式爲____________．

8. 直線$L$： $y=kx+4$與圓$C$： $x^2+y^2=4$相切，則$k=$____________．

9. 若圓$5x^2+5y^2-4x-6y+k=0$與$y$軸相切，則$k=$____________．

10. 設圓$\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=5$與直線$ax+y=b$相切於$\left(3,5\right)$，求數對$\left(a,b\right)=$____________ .

11. 自原點作圓$C$： $x^2+y^2-4x+6y+9=0$的切線，求切線方程式爲____________ .

12. 平面上過點$A\left(4,5\right)$且與圓$C$： $\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$相切的直線方程式爲何？（二解）

13. 坐標平面上自點$P\left(-1,3\right)$作圓$\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4$的二切線，設切點分別爲$A$、$B$，則

(1) $\overline{PA}=$____________；

(2) $\triangle PAB$的外接圓方程式爲____________；

(3)若$\overleftrightarrow{PA}$的方程式爲$y-3=m\left(x+1\right)$且$m<0$，則$m=$____________ .

14. 只知直線$L$： $12x-5y-53=0$與圓$x^2+y^2+16x-8y-89=0$相切，其切點爲____________ .

15. 與單位圓： $x^2+y^2=1$相切的圖形有哪些?

(1) $x=1$　(2) $y=1$　(3) $x+y=1$　(4) $x-y=\sqrt{2}$　(5) $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=16$ .

16. 與$x$軸切於$\left(3,0\right)$且與直線$L$： $4x-3y+12=0$在第一象限相切的圓方程式爲____________

17. 直線$L$： $x+3y-7=0$切圓$C$： $x^2+y^2-6x+ay+b=0$於$\left(4,1\right)$，

則數對$\left(a,b\right)=$____________ .

18. 設圓$C$： $x^2+y^2+ax-y+b=0$，與直線$x+3y+c=0$相切於$(-1,2)$，
則數對$(a,b,c)=$____________．

19. 若圓$C$： $x^2+y^2-2x-6y+k=0$與直線$L$： $x-y=2$不相交，
則實數$k$的範圍爲____________．

20. 若直線$L$： $3x-4y+k=0$與圓$C$： $x^2+y^2=4$不相交，求$k$之範圍．

21. 直線$L$： $x+y=2$被圓$C$： $x^2+y^2=20$所截弦長爲____________．

22. 圓$x^2+y^2-2x+4y-8=0$與$x$軸交於$A$、$B$兩點，求$\overline{AB}=$____________．

23．圓$C$： $x^2+y^2-4x+2y-20=0$，直線$L$： $3x-4y+5=0$，
圓$C$與直線$L$交於$A$、$B$兩點，則$\overline{AB}=$____________．

24. 已知直線$L$： $3x+4y-12=0$，圓$C$： $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，若$P$在圓$C$上，
則$P$至直線$L$之最短距離爲 (1)0 (2)$\frac{2}{5}$ (3)$\frac{8}{5}$ (4)$\frac{12}{5}$ (5)2．

25. 點$P$在直線$L$： $3x-4y+14=0$上，點$Q$在圓$C$： $x^2+y^2-2x+4y+1=0$上，
則$\overline{PQ}$的最小值爲____________．

26. 兩圓$(x-1)^2+(y-3)^2=1$，$x^2+y^2=4$的內公切線交點坐標為____________．

27. 就圓$C$：$x^2+y^2+4x-6y+11=0$與直線$L$：$x+y+k=0$討論$k$的範圍：

(1)有交點，則$k$之範圍為____________．

(2)相切於一點，則切點坐標為____________．

(3)若$k=-1$時，交點坐標為____________．

28. 一光線通過$(-4,5)$，經$x$軸反射後與圓：$(x-2)^2+(y-2)^2=5$相切，

則原光線的方程式為____________．

29. 設一直線$L$：$x+y+a=0$切圓$C$：$x^2+y^2-2x+4y+b=0$於點$A(c,-1)$，

試求數對$(a,b,c)=$____________．

30. 已知圓$C$通過$C_1$：$x^2+y^2+2x-4y+1=0$與直線$L$：$2x-y+4=0$的交點且過點$B(-2,1)$，則圓$C$的方程式為____________．

# 3-3 球面方程式

定義：空間中, 和一個定點等距離的所有點所成的圖形是一個**球面**,

這個定點稱做**球心**, 球心和球面上一點的距離稱爲**半徑**.

## 一、球面方程式：

### 1. 標準式：

在空間中, 以 $M(h,k,l)$ 爲球心, $r$ 爲半徑的球面方程式爲

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$。其球面的表面積爲 $4\pi r^2$，球體積爲 $\frac{4}{3}\pi r^3$。

### 2. 一般式：標準式展開可得一般式 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$。

【討論】: 利用配方法, 我們可將一般式化成標準式, 即

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=D$，依 $D$ 的值可判斷圖形：

(1) $D>0$：一個球面.

(2) $D=0$：一個點$(h,k,l)$.

(3) $D<0$：沒有圖形.

### 3. 直徑式：空間中兩相異點 $P(a_1,b_1,c_1)$, $Q(a_2,b_2,c_2)$ 爲直徑端點的球面方程式爲

$$(x-a_1)(x-a_2)+(y-b_1)(y-b_2)+(z-c_1)(z-c_2)=0$$

**4. 不共平面的四個點決定了一個球面**：將四點坐標代入一般式，解出 $d,e,f,g$ 即可。

## 二、 球與直線的關係：

### 1. 相交兩點：

球心到直線的距離小於半徑。利用直線參數式代入球面程式，得兩個參數 t 的值，即可求出 P、Q 兩交點.

### 2. 相切：

球心到直線的距離等於半徑。利用直線參數式代入球面方程式，得一個個參數

t 的值，即可求出切點；或利用切點到球心的向量與直線的方向向量垂直，來求出 t 值.

**3.** 不相交：

## 三、點與球的關係：

**1.** 點在球內：點與球心的距離小於半徑.

**2.** 點在球上：點與球心的距離等於半徑.

**3.** 點在球外：點與球心的距離大於半徑.

## 四、球與球的關係：由兩球心的距離與兩球的半徑即可決定.

**1.** 外離：

**2.** 外切：

**3.** 交於一圓：過此圓的平面方程式可由兩球面方程式相減得到。

**4.** 內切：

**5.** 內離：

【例 1】求下列各球面方程式：

(1)以 $M(1, -2, 0)$爲球心, 半徑爲 5 的球面方程式.

(2)以 $M(1, -2, 3)$爲球心，且通過原點的球面方程式.

(3)以原點爲球心，通過點$(1, 2, 3)$的球面方程式.

(4)與$(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$有相同球心，且半徑爲$\sqrt{3}$的球面方程式.

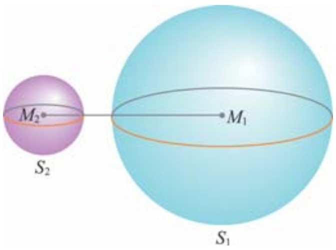
(5)以$\overline{AB}$爲直徑，其中$A(1 , -1 ,3)$, $B(5 ,3 ,3)$.

(6)通過$(1, 1, 2)$, $(2, 2, 4)$兩點，且球心在 $x$ 軸上.

【例 2】設兩球面$S_1:(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$，$S_2:(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$.

(1)判別$S_2$的球心$M_2(5, 1, -1)$在球面$S_1$的內部、外部或球面上.

(2)兩球面$S_1$與$S_2$是否相交？




【例 3】設兩球面$S_1:(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$，$S_2:(x-4)^2+(y+2)^2+z^2=1$.

(1)判別$S_2$的球心$M_2(4, -2, 0)$在球面$S_1$的內部、外部或球面上.

(2)兩球面$S_1$與$S_2$是否相交？

【例 4】判別下列方程式的圖形：

(1) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z-2=0$.

(2) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z+14=0$.

(3) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z+15=0$.

【例 5】已知下列方程式的圖形爲一球面，求 $k$ 之範圍.

(1) $x^2+y^2+z^2+2kx+4y-6z+25+4k=0$

(2) $x^2+y^2+z^2-2kx+4y+2kz+3k^2-2k+1=0$

【例 6】設$k$是任意實數，試依$k$值討論方程式$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2kz+k+7=0$　的圖形.

【例 7】求通過(0, 0, 0), (1, −1, 2), (−2, −4, 0), (−2, −1, 3)四點的球面方程式，

並求其球心和半徑.

【例 8】已知直線$L$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2=9$ 相交於

兩點，求此兩交點坐標.

【例 9】已知直線$L: \dfrac{x-2}{2} = y-1 = \dfrac{z+1}{-2}$與球面$S: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+k=0$ 相切,求實數$k$的值及切點坐標.

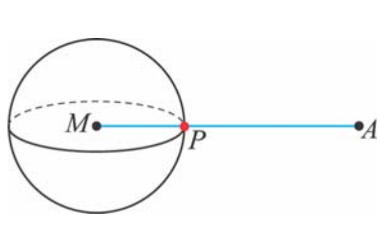
【例 10】已知球面$S$：$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=50$與$z$軸相交於$A, B$兩點，求線段$\overline{AB}$長.

【例 11】已知球面$S$：$x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$與點$A(4,\ -4,\ 4)$.

(1) 若與$S$最遠距離爲$m$，最近距離爲$n$，求$(m,\ n)$.

(2) 若$P$爲球面上與$A$點距離最近的點，求$P$的坐標.

(3) 若$Q$爲球面上與$A$點距離最遠的點，求$Q$的坐標.




## 3-3 精選題

1. 求滿足下述條件之球面的方程式：

(1)球心在點$A(1,-2,3)$，半徑爲 6：____________；

(2)通過點 $P(1,-1,3)$，球心在點 $A(1,-4,-3)$：____________ .

2. 空間坐標系中，$S$ 是以 $A(2,-1,3)$、$B(3,1,1)$ 爲直徑兩端點的球面，若 $S$ 之方程式爲 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，則實數序組 $(d,e,f,g)=$____________ .

3. 一球面 $S$ 通過兩點 $(3,3,0)$ 與 $(-4,0,4)$，且其球心在 $x$ 軸上，求此球面 $S$ 的方程式 .

4. 設有一球面過兩點 $(0,2,2)$、$(4,0,0)$，而球心在 $y$ 軸上，則此球面方程式爲____________ .

5. 球面經過 $P(4,0,8)$、$Q(-2,-4,-4)$，球心在直線 $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ 上，則球心的坐標爲____________ .

6. 判別下列二方程式的圖形：（若爲球面，則寫出其球心坐標及半徑）
(1) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-6=0$；(2) $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+8=0$ .

7. 球面：$x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-7=0$ 上，
(1)與原點距離最近的點坐標爲____________；(2)此最近距離爲____________ .

8. 設點 $P(3,-1,-4)$，球面 $S:(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=36$，$Q$ 爲球面 $S$ 上的點，
則(1)當 $Q$ 之坐標爲____________時，(2) $\overline{PQ}$ 有最大值爲____________ .

9. $A(1,-3,1)$、$B(1,3,4)$、$P(x,y,z)$，求 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$ 的 $P$ 點軌跡方程式____________ .

10. 過 $A(4,0,8)$、$B(-2,-4,-4)$、$C(7,1,4)$、$D(3,4,-1)$ 四點的球面方程式爲____________ .

11. 若方程式 $x^2+y^2+z^2+2ax-2y-2z-\left(a^2+a+4\right)=0$ 的圖形是一個半徑為 4 的球面，求 $a$ 的值．

12. 設方程式 $x^2+y^2+z^2+4ax-2ay-2z-\left(a^2-13a+4\right)=0$ 的圖形為一球面，求 $a$ 之範圍為 ____________．

13. 若方程式 $x^2+y^2+z^2-2kx-2ky+6z+3k+8=0$ 表一點時，試求實數 $k=$____________．

14. 球面 $S$ 的球心為 $(0,0,0)$，且與直線 $L:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-3}{1}=-\dfrac{z-1}{2}$ 相切，則切點坐標為 ____________．

15. 直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{y}{1}=z$，球面 $S:x^2+y^2+z^2+2y+4z+k=0$，

(1)若 $L$ 與 $S$ 相切，求 $k=$____________，切點坐標____________；

(2)若 $L$ 與 $S$ 不相交，求實數 $k$ 之範圍____________．

16. 設直線 $L:\dfrac{x-2}{2}=y-1=-\dfrac{z+1}{2}$ 與球面 $S:x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+k=0$ 相交，求 $k$ 的範圍 ____________．

17. 兩球面 $S_1:\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+1\right)^2=4$ 與 $S_2:x^2+y^2+z^2+4x-4y-10z+32=0$ 之間的最短距離為　(1)3　(2)4　(3)5　(4)6．

18. $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$，球面$S:(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=17$，下列何者爲真?

(1) $L$與$S$相切　　(2) $L$與$S$交於兩點

(3) $L$與$S$不相交　　(4) $L$與$S$交於一線段

(5) $L$與$S$交於一圓．

19. 直線$L:x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$與球面$S:x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-24=0$交於$P$、$Q$兩點，則:

(1) $\overline{PQ}=$____________；(2) $\overline{PQ}$之中點坐標爲____________．

20. 在空間中，球面$S:x^2+y^2+z^2+2x-4z+3=0$及點$P(1,2,-1)$，求:

(1)點$P$到球面$S$的切線段長爲____________；

(2)過$P$之任一直線$L$與球面$S$相交於$A$、$B$二點，則$\overline{PA}\times\overline{PB}=$____________．

21. 設三元二次方程式$x^2+y^2+z^2-2mx+4my-2z+6m^2-3m+3=0$的圖形是一個球面，求(1)實數$m$的範圍爲____________；

(2)當$m=$____________時，此球面的半徑爲最大，又最大半徑爲____________．

22. 在空間坐標中，下列何者正確?

(1) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+15=0$圖形是個球面　　(2) $x^2+y^2=5$圖形是個圓

(3) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z=2\end{cases}$圖形是個圓　　(4) $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ z=2\end{cases}$圖形是個圓

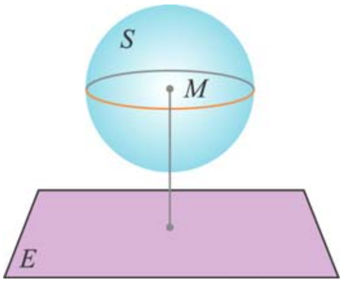
(5) $x^2+y^2=5$圖形是個圓柱形．

23. 設實數$x,y,z$滿足$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$，則$(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$的最小值爲____________．

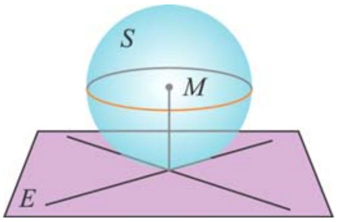
# 3–4 球面與平面的關係

## 一、球與平面的關係

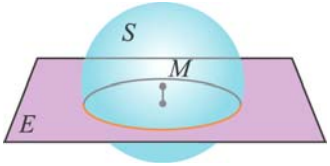
在空間中，平面$E$和球面$S$的相交情形可能有下面三種情形：



(a)不相交



(b)相交於一點



(c)相交於一圓

設 $d$ 為球心 $M$ 到平面 $E$ 的距離, $R$ 為半徑,

(1)當 $d>R$ 時, 球面與平面不相交, 如圖(a).

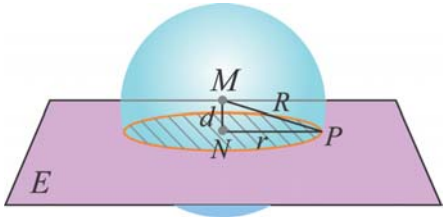
(2)當 $d=R$ 時, 球面與平面相交於一點, 我們稱 $S$ 與 $E$ **相切**,如圖(b).

(3)當 $d<R$ 時, 球面與平面相交於一圓, 如圖(c).

## 二、截圓

當平面 $E$ 與球面 $S$ 的截痕是一圓時，

(1) 球心 $M$ 在平面 $E$ 上的投影點就是截圓的圓心 $N$ .




(2) 截圓的半徑 $r=\sqrt{R^2-d^2}$ .

(3) 當平面恰好通過球心時， 所交出的圓是球面上的**最大圓**.

## 三、切平面與切點面

設球面 $S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ 與點 $P(a,b,c)$ ,

**1.** 切平面方程式：

若 P 在球面上，則球心 $M$ 與點 $P$ 的連線 $\overline{PM}$ 垂直於切平面 $E$ ,

即 $\overline{PM}$ 是切平面 $E$ 的法向量，可求出

E： $(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)+(c-z_0)(z-z_0)=r^2$ 。

與圓上一點求切線的方法相同。

**2.** 切點面方程式(課外)：

若 P 在球面外，對球面 S 所作的切線有無限多條，其所有切點形成一個圓，此圓所在的平面方程式為

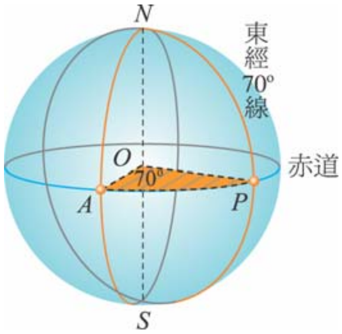
$E: (a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)+(c-z_0)(z-z_0)=r^2$ 。

與切平面方程式的方法相同。

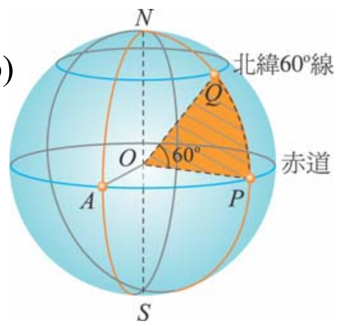
## 四、地球的經度與緯度

地球是依一條貫穿南北極的線段 $\overline{NS}$ 為軸自轉的，我們稱之為**地軸**，包含 $\overline{NS}$ 的平面與球面所交的大圓叫做**經線**．從通過格林威治的經線（0°經線）開始，分成東經與西經各 180°．經線的度數是該經線（半圓）所在的半平面與 0 度經線所在的半平面所夾二面角的度數. 如圖(a)所示，設過$A$點的經線為 0°經線，當 $\angle AOP=70°$時，稱過$P$點的經線為東經 70°線．所有經線的長度都相等.

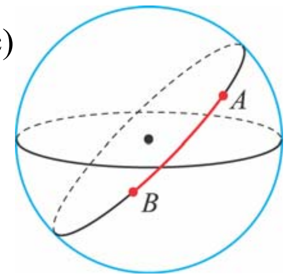
(a)




(b)




(c)




垂直於地軸的平面與球面所截出的圓叫做**緯線**．緯線中唯一的大圓是**赤道**，以赤道（0°緯線）為起點，分成南緯與北緯各 90°．緯線的度數是該緯線上任一點到地心的連線與赤道面的夾角度數. 如圖(b)所示，北緯 60°線是指對線上的任一點$Q$，$\overline{OQ}$ 與赤道面的夾角 $\angle QOP=60°$．緯線的長度並不相同，赤道是最大的緯線圈，越往兩極緯線圈越小．當$Q$點位於東經 70°線上，又在北緯 60°線上時，我們稱$Q$ 點的位置為「東經 70°，北緯 60°」.

球面上兩點 $A$ 和 $B$ 的最短距離，就是通過 $A$，$B$ 兩點的大圓在這兩點間的劣弧．如圖 (c) 中的 $\overset{\frown}{AB}$．我們把這一段弧長叫做兩點間的**球面距離**．飛機、 輪船等都是盡可能以球面距離為航線.

【例 1】在空間中，下列哪些可能是兩相異球面的相交情形？

(1)沒有交點.

(2)相交於一點.

(3)相交於兩點.

(4)相交於一圓.

(5)相交於兩圓.

【例 2】下列各平面中，哪一個平面與球面 $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=2$ 相交所成的圓面積最大？

(1) $xy$ 平面.

(2) $yz$ 平面.

(3) $xz$ 平面.

(4) $x+2y-2z-1=0$.

(5) $x+y+z=0$.

【例 3】設球面 $S$： $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-11=0$，平面 $E$： $x-2y-2z+k=0$.

(1)若平面 $E$ 和球面 $S$ 相交於一圓，求 $k$ 的範圍.

(2)當 $k$ 爲何值時，平面 $E$ 會和球面 $S$ 交出最大的圓？

【例 4】已知下列球面與平面交於一圓，試著求出交圓的圓心、半徑與面積.

(1) $S$： $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z-11=0$，$E$： $2x+2y-z+3=0$

(2) $S$：$x^2+y^2+z^2-14=0$，$E$：$2x+2y+z-9=0$

(3) $S$： $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=16$，$E$： $2x+y-2z+5=0$.

【例 5】已知球面 S 及球面上一點 P，分別求出過 $P$ 點的切平面方程式.

(1) $S$： $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$, $P(-1, 4, 2)$.

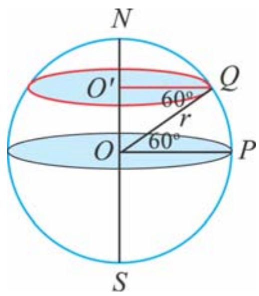
(2) $S$：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$, $P(1,1,1)$.

【例 6】球面 $S$ 通過點$(0, 0, 2)$且在 $xy$ 平面上所截出的圓爲$(x-2)^2+(y-1)^2=1$,

求球面 $S$ 的方程式.

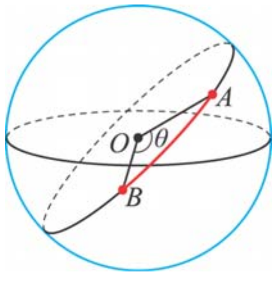
【例 7】已知某一地球儀的赤道長爲 100 公分,

則其北緯$60°$的緯線長爲多少公分？




【例 8】設地球半徑爲 6400 公里, 某一探險隊循著北緯 $60°$的緯度線由東經 $60°$向東行走至東經 $105°$, 此探險隊一共走了多少公里？

【例 9】$A(6, 0, 0)$, $B(-3, 3, 3\sqrt{2})$爲球面 $x^2+y^2+z^2=36$ 上兩點, 今有一隻螞蟻沿著球面由 $A$ 爬到 $B$, 螞蟻的爬行路線中最短距離是多少？



【例 10】通過 $O(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 4)$, $Q(1, \sqrt{11}, 2)$三點的平面

與球面 $S$： $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 相交於一個圓 $C$, 求圓 $C$ 上劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的弧長.

【例 11】設地球儀的球心為空間坐標的原點, 地球儀上 $A$, $B$ 兩個城市

的坐標分別為 $A(1, 2, 2)$ , $B(2, -2, 1)$.

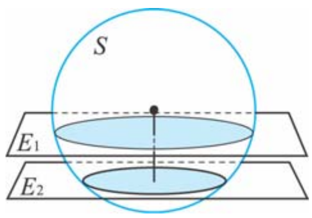
(1)求地球儀上 $A$, $B$ 兩點間的最短距離.

(2)若地球的實際半徑為 6400 公里, 求飛機從 $A$ 城市

直飛至 $B$ 城市的最短航線長.

【例 12】空間中一球面 $S$ 如圖, 在球心同一側有距離為 9 的兩平行面 $E_1$ 與 $E_2$, 若 $E_1$, $E_2$

與球面 $S$ 所截的圓面積分別為 $400\pi$ 與 $49\pi$, 求 $S$ 的半徑.




【例 13】8.設一球形的地球儀南北極的坐標分別為 $S(1, 2, -1)$ 與

$N(5, -2, 3)$, 包含南緯 30°線的平面為 $E$. (1) 求

平面 $E$ 的法向量. (2) 求

平面 $E$ 的方程式.

【例 14】設球面 $S$：$x^2+y^2+z^2=9$，$P(x,y,z)$ 為球面上一點，求 $2x-y+2z$ 的最大值與有最大值時的 $P$ 點坐標.

**【備忘錄】**

## 3-4 精選題

1. 一球 $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1103$，被一平面 $3x-2y+5z=k$ 所截出的圓面積最大時，$k=$ (1)3 (2)1 (3) $-1$ (4) $-3$ .

2. 在空間中，球面$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$，下列何者與$S$截出大圓?

(1) $x-y+z=4$　(2) $3x+2y-z=1$　(3) $x=1$　(4) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$　(5) $2x=z$ .

3. 設平面$E:2x+2y+z=k$與球面$S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=r^2$的交集為一圓，
則下列何者可能為此圓之圓心?
(1) $(1,5,7)$　(2) $(3,5,4)$　(3) $(4,5,3)$　(4) $(3,4,5)$　(5) $(5,4,3)$ .

4. 平面$E:x-2y+2z=7$上，已知球面$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=k$與平面$E$相切，
則 (1) $k$之值為____________；(2)切點的坐標為____________ .

5. 平面$F:x-2y+2z=k$與球面$S:x^2+y^2+z^2=9$相切，則$k=$____________ .（有兩解）

6. 求與平面$6x-2y+3z+1=0$相平行且與球面$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$
相切之平面的方程式為____________ .

7. 設球面$S:(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$與平面$2x+2y+z=11$相切，
切點為____________ .

8. 過$P(2,0,1)$與球面$S:(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$相切之平面方程式為____________ .

9. 過$A(1, 0 ,1)$與球面$S:x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+4=0$相切之平面方程式為____________ .

10. 球面$S$切$xy$平面於點$A(3,4,0)$，且點$B(6,2,1)$在球面$S$上，

則球面$S$的方程式爲____________.

11. 空間中，一球面$S$被$xy$平面所截出的圓方程式爲$(x+1)^2+(y-3)^2=36$，且此球面$S$通過點$P(5,6,3)$，求$S$的半徑爲________，求$S$的方程式____________

12. 一球面$S$與平面$E:x-2y+z=7$相切於點$P(3,1,6)$，且半徑爲$\sqrt{6}$，求$S$的方程式.

13. 已知空間中一球被$yz$平面所截之圓方程式爲$(y+2)^2+(z-3)^2=8$，且球心在平面$3x+y-z=1$上，則球面方程式爲____________.

14. 空間四點$O(0,0,0)$、$A(3,0,0)$、$B(0,6,0)$、$C(0,0,9)$，則三角錐$O-ABC$之內切球方程式爲____________.

15. 與平面$x-2y-2z=7$切於點$(3,-1,-1)$且過點$(1,1,-3)$之球面，求(1)其球心坐標爲____________；(2)半徑爲____________.

16. 設球面$S:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$與平面$x+y+z-3=0$相交於一截面圓，求(1)截面圓圓心____________；(2)截面圓半徑____________.

17. 平面$E:2x+3y-6z+2=0$，球面$S:x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z=0$，則球$S$上之點到$E$之距離之最大值爲____________.

18. 設球面$S:(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$與球面外一點$P(-1,7,7)$，

(1)求點$P$到$S$的切線段長____________；

(2)球面上一點$M$到點$P$距離最大時，點$M$坐標爲____________.

19. $P(x_1, y_1, z_1)$ 為球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 上的動點，則

(1) $x_1+y_1+z_1$ 之最大值為____________；
(2) $P$ 到平面 $E: x-2y+2z=9$ 的最近距離為____________．

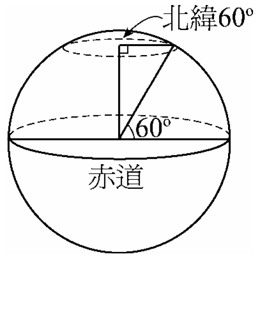
20. 球面 $S: x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z=0$ 與平面 $E: x+2y-2z+k=0$
(1)若 $S$ 與 $E$ 交成一圓，則 $k$ 的範圍為____________；
(2)若 $S$ 與 $E$ 相切於一點，則 $k$ 的值為____________；
(3)若 $S$ 與 $E$ 不相交，則 $k$ 的範圍為____________；
(4)若 $S$ 與 $E$ 交成一大圓，則 $k$ 的值為____________；
(5)若球面 $S$ 與平面 $E$ 相交，則 $k$ 之範圍為____________．

21. 空間中以 $P(10,2,5)$、$Q(-6,10,11)$ 兩點為直徑的球面方程式 S，試問：
(1) 球面 $S$ 的方程式為____________；
(2) 此球面與 $xy$ 平面相交所成的圓區域的面積為____________；
(3) 此球面在 $z$ 軸上截出之線段長為____________．

22. 已知空間中兩點 $A(2,2,0)$，$B(1,4,0)$，若平面 $E: 2x+by+cz+d=0$ $(d<0)$ 通過 $A$、$B$ 兩點，

且與球面 $S: x^2+y^2+z^2=4$ 相切，則序組 $(b,c,d)=$____________．

23. 假設某一球形之地球儀其赤道長為 100 公分，
則北緯 $60^\circ$ 的緯線長為____________公分．




24. 設一光源位於 $A(0,0,8)$，投射球面 $S: x^2+y^2+z^2=16$

在平面 $z+7=0$ 之投影為圓 $C$
(1)求圓 $C$ 的面積為____________；(2)若平面 $F$ 將球面 $S$ 分成受光部分與背光部分，求平面 $F$ 的方程式為____________．

# 第 3 章總習題

1. 圓 $C: (x-1)^2+(y+2)^2=9$，下列直線被圓 $C$ 所截的弦何者最長？
(1)$x$ 軸.
(2)$y$ 軸.

(3) $x + y = 1$.
(4) $3x - 4y = 7$.
(5) $2x + y = 5$.

2. 坐標平面上兩圓 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 與 $C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 9$，下列哪些直線是這兩圓的共同切線（公切線）？

(1) $x + y = \sqrt{2}$.

(2) $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.

(3) $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$.

(4) $x = 1$.

(5) $y = 1$.

3. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 與空間中兩點 $P(1, 2, 2)$, $Q(-1, -2, -2)$的關係是：

(1)線段 $\overline{PQ}$ 和球面交於一點.

(2)直線 $PQ$ 和球面交於兩點.

(3)射線 $PQ$ 和球面交於兩點.

(4)直線 $PQ$ 通過球心.

(5)包含直線 $PQ$ 的任一平面與球面的截痕都是一個大圓.

4. 求通過點(1, 2)且與 $x$ 軸, $y$ 軸均相切的圓方程式.

5. 已知圓 $C$ 與 $y$ 軸交於 $A(0, -4)$, $B(0, -2)$兩點，且圓心在直線 $2x - y = 7$ 上，求圓 $C$ 的方程式.

6. 圓 $x^2 + y^2 - x - 6 = 0$ 的內部及圓上共有幾個格子點？

（格子點就是 $x$ 坐標和 $y$ 坐標都是整數的點.）

7. 在半徑爲 30 公分的球形地球儀上，已知點 $P$ 位於東經 $10°$，南緯 $30°$；點 $Q$ 位於東經 $70°$，南緯 $30°$，則 $P, Q$ 兩點在南緯 $30°$ 線上的劣弧長爲多少公分？

8. 設球面 $S$ 的半徑爲 2，平面 $E: x+y+z=3$，已知平面 $E$ 與球面 $S$ 交圓的圓心 $(0, 1, 2)$，半徑爲 1，求球面 $S$ 的方程式.

9. 已知球面 $S$ 與平面 $E$：$x+2y-2z+16=0$ 相切於 $A(-2, -4, 3)$ 且球面 $S$ 通過 $B(2, -2, 5)$，求球面 $S$ 的方程式.

10. 明君利用半徑 $\sqrt{2}$ 的圓形圖案來設計右圖的長方形徽章 $OABC$，徽章左右寬度爲 4，圓形圖案的圓心與兩側等距離且與 $\overline{OA}$ 的距離爲 3. 已知 $\overline{OD}=1$，$\overline{CD}$ 與 $\overline{DE}$ 都和圓相切. 求 (1) $\overline{AE}$.　　(2) $\overline{OC}$.